**Домашнее задание №2 «СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ»**

**Задача 1.**

**Моделирование гауссовского процесса с данной автоковариационной функцией**

На отрезке с шагом смоделируйте траекторий гауссовского процесса с заданным математическим ожиданием и заданной автоковариационной функцией . Выведите на печать две-три траектории.

Выберите несколько пар сечений построенного процесса (для далеких значений и , для близких, для соседних). Постройте для выбранных пар сечений диаграммы рассеяния, вычислите выборочные коэффициенты корреляции, постройте 95% доверительные интервалы и сравните с теоретическими значениями соответствующих коэффициентов корреляции.

Сформулируйте выводы.

**Варианты**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №  Вар. | Интервал | Шаг | Число траек-  торий | Математическое ожидание | Автоковариационная функция |
| **1** |  | 0.1 | 160 |  |  |
| **2** |  | 0.05 | 180 |  |  |
| **3** |  | 0.05 | 100 |  |  |
| **4** |  |  | 120 |  |  |
| **5** |  | 0.02 | 140 |  |  |
| **6** |  | 0.05 | 150 |  |  |
| **7** |  | 0.05 | 160 |  |  |
| **8** |  | 0.05 | 180 |  |  |
| **9** |  | 0.05 | 100 |  |  |
| **10** |  |  | 120 |  |  |
| **11** |  | 0.02 | 140 |  |  |
| **12** |  | 0.05 | 150 |  |  |
| **13** |  | 0.03 | 160 |  |  |
| **14** |  | 0.04 | 180 |  |  |
| **15** |  | 0.05 | 100 |  |  |
| **16** |  |  | 120 |  |  |
| **17** |  | 0.02 | 140 |  |  |
| **18** |  | 0.05 | 150 |  |  |
| **19** |  | 0.05 | 160 |  |  |
| **20** |  | 0.05 | 180 |  |  |
| **21** |  | 0.05 | 100 |  |  |
| **22** |  |  | 120 |  |  |
| **23** |  | 0.01 | 140 |  |  |
| **24** |  | 0.05 | 150 |  |  |

**Алгоритм моделирования траекторий**

1. Находим размерность случайного вектора , .
2. Вычисляем вектор математических ожиданий и матрицу ковариаций , и .
3. Генерируем с помощью встроенного датчика случайных чисел базовую последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин
4. Находим квадратный корень Холецкого из матрицы , то есть такую нижнетреугольную матрицу , что . Тогда, как было доказано на лекции, матрица будет ковариационной для центрированной последовательности .
5. Последний шаг- добавляем нужное математическое ожидание: .

**Замечание**. В среде Mathcad имеется встроенная функция, вычисляюшая нижнетреугольную матрицу Холецкого:

**Но можно и самостоятельно реализовать соответствующий алгоритм (см. прилагаемую справку).**

**Справка. Разложение Холесского**

Пусть - симметричная невырожденная положительно определенная матрица (ковариационная матрица гауссовского вектора )

Тогда имеет место разложение , где –нижнетреугольная матрица

Элементы матрицы находим по столбцам:

Первый столбец:

Второй столбец:

-ый столбец:

Последний элемент

**Задача 2. Моделирование двумерного винеровского процесса**

**Алгоритм**

Пусть необходимо найти значения двумерного винеровского процесса интенсивности в точках вида , причем .

1. Полагаем
2. Для каждого моделируем пару независимых нормально распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями
3. Вычисляем
4. Результат – последовательность точек . Соединив эти точки для наглядности отрезками прямых, получим смоделированную траекторию.

**Задание**

1. На интервале смоделируйте траекторий двумерного винеровского процесса интенсивности с шагом .
2. Выведите на печать 5-7 траекторий (мультимедийность приветствуется)
3. Для каждой траектории вычислите
4. вариации компонент

Найдите среднее значение вариации по всем траекториям

1. суммы квадратов приращений компонент

Найдите среднее значение этих сумм

1. Уменьшите значение в два раза и вычислите и

Сравните полученные значения для исходного и уменьшенного шага и объясните результат.

1. Вычислите теоретическую вероятность и сравните ее с эмпирической вероятностью достижения указанного уровня в момент .

**Данные**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вар |  |  |  |  |  | Вар |  |  |  |  |  |
| 1 | 12 | 100 | 0.4 | 0.1 | 2 | 12 | 10 | 160 | 0.75 | 0.04 | 2.5 |
| 2 | 10 | 120 | 0.6 | 0.05 | 3 | 13 | 6 | 180 | 1 | 0.02 | 3.5 |
| 3 | 15 | 140 | 0.3 | 0.1 | 2 | 14 | 2 | 200 | 1.2 | 0.01 | 3.5 |
| 4 | 12 | 150 | 0.5 | 0.08 | 3 | 15 | 14 | 100 | 0.25 | 0.1 | 1.5 |
| 5 | 8 | 160 | 0.5 | 0.04 | 3 | 16 | 7 | 120 | 0.75 | 0.05 | 2 |
| 6 | 5 | 180 | 0.75 | 0.02 | 2 | 17 | 12 | 140 | 0.6 | 0.08 | 4 |
| 7 | 3 | 200 | 1 | 0.01 | 2.5 | 18 | 6 | 150 | 0.6 | 0.04 | 1.5 |
| 8 | 15 | 100 | 0.3 | 0.1 | 2.5 | 19 | 4 | 160 | 0.75 | 0.02 | 2.5 |
| 9 | 8 | 120 | 0.4 | 0.05 | 2 | 20 | 3 | 180 | 0.8 | 0.01 | 2.5 |
| 10 | 16 | 140 | 0.25 | 0.1 | 2 | 21 | 12 | 200 | 0.2 | 0.1 | 1.5 |
| 11 | 16 | 150 | 0.4 | 0.08 | 3.5 | 22 | 9 | 100 | 0.5 | 0.05 | 3 |

**Задача 3**. Задан случайный процесс . Найдите ( не дифференцируя и не интегрируя ):

1) Математическое ожидание , ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса ;

2) Математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса ;

3) Математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса ;

4) Математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса ;

5) Взаимные ковариационные функции и .

**Варианты заданий.**

1. , где случайный вектор имеет математическое ожидание и ковариационную матрицу .
2. , где случайный вектор имеет математическое ожидание и ковариационную матрицу .
3. , где и - некоррелированные случайные величины,
4. , где и - некоррелированные случайные величины,
5. , где случайный вектор имеет математическое ожидание и ковариационную матрицу .
6. , где и - некоррелированные случайные величины,

1. , где случайный вектор имеет математическое ожидание и ковариационную матрицу .
2. , где и - некоррелированные случайные величины,

1. , где случайный вектор имеет математическое ожидание и нормированную ковариационную матрицу .
2. , где случайный вектор имеет математическое ожидание и ковариационную матрицу .
3. , где и - некоррелированные случайные величины,

1. , где и - некоррелированные случайные величины,

1. , где случайный вектор имеет математическое ожидание и нормированную ковариационную матрицу .
2. , где и - некоррелированные случайные величины,

1. , где и - некоррелированные случайные величины,

1. , где и - некоррелированные случайные величины,

1. , где .
2. , где .
3. , где и - некоррелированные случайные величины,

1. , где случайный вектор имеет математическое ожидание и ковариационную матрицу .
2. , где и - некоррелированные случайные величины,

1. , где и - некоррелированные случайные величины,

1. , где и - некоррелированные случайные величины,

1. , где .
2. , где случайный вектор имеет математическое ожидание и ковариационную матрицу .

**Задача 4**

Задана ковариационная функция стационарного случайного процесса . Найдите

1) ковариационную функцию, дисперсию и нормированную ковариационную функцию случайного процесса ,

2) Взаимную ковариационную функцию ,

3) ковариационную функцию, дисперсию и нормированную ковариационную функцию случайного процесса .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вар |  | Вар |  |
| 1 |  |  |  |
| 3 |  | 4 |  |
| 5 |  | 6 |  |
| 7 |  | 8 |  |
| 9 |  | 10 |  |
| 11 |  | 12 |  |
| 13 |  | 14 |  |
| 15 |  | 16 |  |
| 17 |  | 18 |  |
| 19 |  | 20 |  |
| 21 |  | 22 |  |
| 23 |  | 24 |  |
| 25 |  | 26 |  |
| 27 |  | 28 |  |

.

**Задача 5.**

Стационарные случайные процессы связаны соотношением:

Найдите , если известна .

Варианты функции :

1) ; 2) ;

3) ; 4)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вар. |  |  |  |  |  |  |  |  | Вар. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 16 | 4 | 1 | 9 | 3 | 4 | 3 | 2 | 6 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 3 | 4 | 1 | 17 | 1 | 2 | 8 | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 5 | 4 | 3 | 4 | 1 | 2 | 18 | 2 | 6 | 0 | 4 | 2 | 3 | 4 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 8 | 3 | 5 | 1 | 2 | 3 | 19 | 3 | 5 | 6 | 2 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 5 | 6 | 4 | 1 | 6 | 2 | 3 | 20 | 4 | 5 | 7 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 6 | 2 | 6 | 0 | 5 | 2 | 3 | 7 | 4 | 21 | 1 | 8 | 4 | 6 | 1 | 0 | 2 | 3 |
| 7 | 3 | 7 | 5 | 6 | 1 | 4 | 3 | 8 | 22 | 2 | 4 | 0 | 4 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 8 | 4 | 8 | 2 | 7 | 4 | 3 | 8 | 1 | 23 | 3 | 3 | 2 | 12 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 11 | 6 | 3 | 3 | 8 | 7 | 4 | 24 | 4 | 5 | 1 | 11 | 5 | 4 | 0 | 2 |
| 10 | 2 | 12 | 0 | 4 | 2 | 4 | 3 | 1 | 25 | 1 | 7 | 3 | 5 | 3 | 7 | 3 | 7 |
| 11 | 3 | 10 | 4 | 3 | 5 | 4 | 3 | 2 | 26 | 2 | 10 | 0 | 7 | 2 | 5 | 1 | 5 |
| 12 | 4 | 13 | 5 | 1 | 4 | 3 | 2 | 5 | 27 | 3 | 5 | 7 | 9 | 4 | 2 | 2 | 4 |
| 13 | 1 | 15 | 3 | 6 | 3 | 2 | 5 | 4 | 28 | 4 | 3 | 9 | 3 | 1 | 4 | 0 | 9 |
| 14 | 2 | 2 | 0 | 7 | 2 | 5 | 4 | 3 | 29 | 1 | 8 | 3 | 7 | 2 | 1 | 3 | 6 |
| 15 | 3 | 3 | 10 | 8 | 6 | 4 | 3 | 2 | 30 | 2 | 4 | 0 | 6 | 5 | 4 | 2 | 1 |

.